

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα Εφάπαξ

1. Δάνειο 30.000 ευρώ πρέπει να εξοφληθεί σε 7 ετήσιες δόσεις με ετήσιο επιτόκιο 7,5% και δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος. Να βρεθεί το χρεολύσιο, αν το επιτόκιο ανασύστασης είναι 4,5% και
- α) οι τόκοι πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους,
  - β) οι τόκοι δεν πληρώνονται στο τέλος κάθε έτους

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=30.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με επιτόκιο 7,5% και η διάρκεια του 7 έτη.

- α) Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=4,5\%$ ) και πληρωμή των τόκων κάθε έτος.

Οι ετήσιοι τόκοι δανείου είναι  $30.000 \cdot 0,075 = \mathbf{2.250}$  ευρώ

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο (δόση για κατάθεση) είναι

$$D = K \cdot P_{n|t}$$

Και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$D = 30.000 \cdot P_{7|4,5\%} = 30.000 \cdot 0,1247 = \mathbf{3.741}$$
 ευρώ

- β) Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=4,5\%$ ) χωρίς πληρωμή των τόκων κάθε έτος.

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο (δόση για κατάθεση) είναι

$$D = K \cdot (1+i)^n \cdot P_{n|t}$$

Και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$D = 30.000 \cdot (1+0,075)^7 \cdot P_{7|4,5\%} = 30.000 \cdot 1,659 \cdot 0,1247 = \mathbf{6.206,4}$$
 ευρώ

Στην β περίπτωση καταθέτουμε 6.206,4 κάθε έτος, ενώ στην περίπτωση α, καταθέτουμε 3.741 και πληρώνουμε και 2.250 για τους τόκους, συνολικά στην α περίπτωση  $3.741 + 2.250 = 5.991$  ευρώ, δηλαδή μικρότερο ετήσιο κόστος από τη β, επειδή πληρώνονται οι τόκοι κάθε έτος και δεν ανατοκίζονται όλοι στο τέλος.

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα

## Εφάπαξ

2. Έμπορος πήρε δάνειο 50.000 ευρώ για 8 έτη με ετήσιο επιτόκιο 7% με τη συμφωνία να το ξεοφλήσει όλο μαζί στη λήξη. Να υπολογισθεί ο πίνακας απόσβεσης δανείου α) αν οι τόκοι πληρώνονται κάθε χρόνο και β) αν οι τόκοι πληρωθούν όλοι μαζί στο τέλος. Υποθέστε ότι δημιουργείται εξοφλητικό απόθεμα με επιτόκιο 4%.

Λύση

Το κεφάλαιο K του δανείου είναι  $K=50.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με επιτόκιο 7% και η διάρκεια του 8 έτη.

α) Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=4\%$ ) και πληρωμή των τόκων κάθε έτος.

Οι ετήσιοι τόκοι δανείου είναι  $50.000 \cdot 0,07 = 3.500$  ευρώ

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο (δόση για κατάθεση) είναι  $D = K \cdot P_{n|t}$

βρίσκουμε  $D = 50.000 \cdot P_{8|4\%} = 50.000 \cdot 0,1085 = 5.426,4$  ευρώ

Ο πίνακας απόσβεσης θα είναι ο εξής:

Έτος	Δόση	Τόκος	Σύνολο κατάθεσης	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο δανείου
1	5426,4	3500	5426,4		50.000
2	5426,4	3500	$5426,4 \cdot (1,04) + 5.426,4 = 11.069,86$		50.000
3	5426,4	3500	$11.069,86 \cdot (1,04) + 5.426,4 = 16.939$		50.000
4	5426,4	3500	$11.069,86 \cdot (1,04) + 5.426,4 = 23.043$		50.000
5	5426,4	3500	$23.043 \cdot (1,04) + 5.426,4 = 29.391,1$		50.000
6	5426,4	3500	$29.391,1 \cdot (1,04) + 5.426,4 = 35.993,2$		50.000
7	5426,4	3500	$35.993,2 \cdot (1,04) + 5.426,4 = 42.859,3$		50.000
8	5426,4	3500	42.859,3 50.000	50.000	0

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα

## Εφάπαξ

2. Έμπορος πήρε δάνειο 50.000 ευρώ για 8 έτη με ετήσιο επιτόκιο 7% με τη συμφωνία να το ξεφλήσει όλο μαζί στη λήξη. Να υπολογισθεί ο πίνακας απόσβεσης δανείου α) αν οι τόκοι πληρώνονται κάθε χρόνο και β) αν οι τόκοι πληρωθούν όλοι μαζί στο τέλος. Υποθέστε ότι δημιουργείται εξοφλητικό απόθεμα με επιτόκιο 4%.

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=50.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με επιτόκιο 7% και η διάρκεια του 8 έτη.

β) Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=4\%$ ) χωρίς πληρωμή των τόκων κάθε έτος.

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο (δόση για κατάθεση) είναι  $D=K*(1+i)^n * P_{n|t}$   
βρίσκουμε  $D=50.000*(1+0,07)^8 * P_{8|4\%}=50.000*1,7182*0,1085= 9.323,6$  ευρώ

Ο πίνακας απόσβεσης θα είναι ο εξής:

Έτος	δόση	τόκος	Σύνολο κατάθεσης	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο δανείου
1	9.323,6		9.323,6		50.000
2	9.323,6		9.323,6* (1,04) +9.323,6= 19.020,1		50.000
3	9.323,6		19.020,1* (1,04) +9.323,6= 29.104,6		50.000
4	9.323,6		29.104,6* (1,04) +9.323,6= 39.592,3		50.000
5	9.323,6		39.592,3* (1,04) +9.323,6= 50.499,6		50.000
6	9.323,6		50.499,6* (1,04) +9.323,6= 61.843,2		50.000
7	9.323,6		61.843,2* (1,04) +9.323,6= 73.640,5		50.000
8	9.323,6		73.640,5* (1,04) +9.323,6= 85.909	50.000 (1,07) <sup>8</sup>	0

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα Εφάπαξ

3. Ποιο ποσό χρημάτων πρέπει να καταθέτει κάποιος κάθε εξάμηνο για 4 χρόνια, ώστε να μπορέσει να αποσβέσει δάνειο 20.000 ευρώ με επιτόκιο δανεισμού 6%, το οποίο εξοφλείται στη λήξη του μαζί με τους τόκους. Να υποθεθεί ότι το ετήσιο επιτόκιο καταθέσεων είναι 4%.

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=20.000$ , ο ανατοκισμός εξαμηνιαίος με επιτόκιο 6% ετήσιο επομένως 3% εξαμηνιαίο, η διάρκεια του 4 έτη, δηλαδή 8 εξάμηνα.

Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=4\%$  ετήσιο δηλαδή 2% εξαμηνιαίο) χωρίς πληρωμή των τόκων κάθε έτος.

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο (δόση για κατάθεση) είναι  $D=K*(1+i)^n*P_{n|t}$

Και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$D=20.000*(1+0,03)^8 * P_{8|2\%}=20.000*1,2668*0,1165=2.939 \text{ ευρώ}$$

4. Η Εταιρεία Ε πήρε δάνειο 40.000 ευρώ το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 έτη με το σύστημα Sinking Fund. Να υπολογισθεί η ετήσια δόση και να κατασκευασθεί ο πίνακας αποσβέσεως του δανείου. επιτόκιο δανεισμού 6,5% και επιτόκιο καταθέσεως 3%.

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=40.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με επιτόκιο 6,5% ετήσιο, η διάρκεια του 10 έτη.

Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=3\%$ ) με πληρωμή των τόκων κάθε έτος.

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο (δόση για κατάθεση) είναι  $D=K*P_{n|t}$

Και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$D=40.000* P_{10|3\%}=40.000*0,0872=3.488 \text{ ευρώ πληρώνουμε επίσης κάθε έτος για τόκους ποσό } 40.000*0,065= 2.600 \text{ ευρώ.}$$

Επομένως το ετήσιο κόστος του δανείου είναι 2.600 για τόκους και 3.488 για τη δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος ώστε στο τέλος των 10 ετών αυτό να γίνει 40.000 και να ξεπληρώσει το δάνειο.

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα

## Εφάπαξ

5. Δάνειο εξοφλείται με το σύστημα Sinking Fund και επιτόκιο 8%. Αν στο τοκοχρεολύσιο του δανείου ο τόκος είναι 4800 ευρώ, να βρεθεί το ποσό του δανείου και το ετήσιο χρεολύσιο όταν η διάρκεια δανείου είναι 5 χρόνια και το επιτόκιο ανασύστασης 6%.

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι άγνωστο, ο ανατοκισμός ετήσιος με επιτόκιο 8% ετήσιο, η διάρκεια του 5 έτη.

Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=6\%$ ) με πληρωμή των τόκων κάθε έτος.

Οι ετήσιοι τόκοι δανείου είναι  $K \cdot 0,08 = \mathbf{4.800}$  ευρώ

Από τον τύπο αυτό μπορούμε να βρούμε το κεφάλαιο  $K = 4.800 / 0,08 = 60.000$  ευρώ

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο (δόση για κατάθεση) είναι  $D = K \cdot P_{n|t}$

Και βρίσκουμε  $D = 60.000 \cdot P_{5|6\%} = 60.000 \cdot 0,1774 = \mathbf{10.644}$  ευρώ.

6. Έμπορος θέλει να δανειστεί 500.000 ευρώ για 8 έτη. Η τράπεζα Α δανείζει με ετήσιο επιτόκιο 10% και το δάνειο εξοφλείται με πληρωμή τόκων κάθε έτος και κατάθεση χρεολυσίου με το ίδιο επιτόκιο δανεισμού. Η τράπεζα Β δανείζει με ετήσιο επιτόκιο 9% αν οι τόκοι πληρώνονται κάθε έτος και το δάνειο εξοφλείται όλο στη λήξη του, αφού ο έμπορος κάνει ίσες ετήσιες καταθέσεις στην Τράπεζα με επιτόκιο 7%. Ποια τράπεζα θα προτιμήσει ο έμπορος;

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K = 500.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος, η διάρκεια του 8 έτη.

Στην Α τράπεζα το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=10\%$ ) με πληρωμή των τόκων κάθε έτος με επιτόκιο 10%.

Οι ετήσιοι τόκοι δανείου είναι  $500.000 \cdot 0,10 = \mathbf{50.000}$  ευρώ

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο (δόση για κατάθεση) είναι  $D = K \cdot P_{n|t}$

$$\Leftrightarrow D = 500.000 \cdot P_{8|10\%} = 500.000 \cdot 0,0874 = \mathbf{43.700}$$
 ευρώ.

Στην Β τράπεζα το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=7\%$ ) με πληρωμή των τόκων κάθε έτος με επιτόκιο 9%.

Οι ετήσιοι τόκοι δανείου είναι  $500.000 \cdot 0,09 = \mathbf{45.000}$  ευρώ

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο (δόση για κατάθεση) είναι  $D = K \cdot P_{n|t}$

$$\Leftrightarrow D = 500.000 \cdot P_{8|7\%} = 500.000 \cdot 0,0975 = \mathbf{48.750}$$
 ευρώ.

Η Α έχει λίγο μικρότερο ετήσιο κόστος δανείου ( $93.700 < 93.750$ )

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα Εφάπαξ

7. Δανείστηκε κάποιος 150.000 ευρώ προς 11% και για την ανασύσταση αυτού του ποσού, μπορεί να διαθέτει κάθε έτος 14.000 ευρώ τις οποίες καταθέτει με επιτόκιο 7%. Σε πόσα χρόνια θα έχει δημιουργήσει το ποσό του δανείου, όταν πληρώνει τόκους κάθε έτος;

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=150.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με επιτόκιο 11% ετήσιο, η διάρκεια του άγνωστη.

Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι εφάπαξ αποπληρωμή με δημιουργία εξοφλητικού αποθέματος (επιτόκιο  $t=7\%$ ) με πληρωμή των τόκων κάθε έτος.

Οι ετήσιοι τόκοι δανείου είναι  $K*0,11=150.000*0,11=16.500$  ευρώ

Και προφανώς πληρώνονται ξεχωριστά και δεν αφορούν στο διαθέσιμο ποσό των 14.000 ευρώ (δόση για κατάθεση)

Ο τύπος της ετήσιας δόσης κατάθεσης είναι  $D=K*P_{n|t}$

Αντικαθιστώντας έχουμε την εξίσωση  $14.000=150.000*P_{n|7\%} \Leftrightarrow P_{n|7\%}=14.000/150.000 \Leftrightarrow P_{n|7\%}=0,0933$ .

Επομένως θα πρέπει για τα ζητούμενα άγνωστα έτη, ο συντελεστής χρεολυσίου να είναι 0,0933 όταν το επιτόκιο είναι 7%.

Ψάχνουμε στον πίνακα συντελεστή χρεολυσίου, στη στήλη που αντιστοιχεί στο 7%, για ποια τιμή του  $n$  ο συντελεστής είναι κοντά στο 0,0933

Εντοπίζουμε  $P_{8|7\%}=0,0975$  και  $P_{9|7\%}=0,0835$

Συμπεραίνουμε ότι περίπου στα 8,5 έτη ο καταθετικός λογαριασμός που θα δημιουργήσουμε με 14.000 κάθε έτος θα συγκεντρώσει το ποσό των 150.000 ευρώ του δανείου.

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά

1. Δάνειο 40.000 ευρώ πρέπει να εξοφληθεί σε 4 ετήσιες δόσεις με ετήσιο επιτόκιο 7,5%. Να βρεθεί το χρεολύσιο κάθε έτους στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- α) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και σταθερό χρεολύσιο,
- β) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (γαλλικό σύστημα)
- γ) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (σύστημα Κεντρικής Ευρώπης)
- δ) εξόφληση με μεταβλητό τοκοχρεολύσιο (σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου)

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=40.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με επιτόκιο 7,5% ετήσιο, η διάρκεια του 4 έτη.

α) Ο τύπος που μας δίνει το σταθερό χρεολύσιο είναι  $X=K \cdot P_{n|i}$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$X=40.000 \cdot P_{4|7,5\%}=40.000 \cdot 0,2236 = \mathbf{8.943} \text{ ευρώ}$$

Πληρώνουμε επίσης κάθε έτος για τόκους ποσό  $40.000 \cdot 0,075 = \mathbf{3.000}$  ευρώ.

Επομένως το τοκοχρεολύσιο είναι  $R=8.943+3000=\mathbf{11.943}$  ευρώ

β) Με το γαλλικό (προσθευτικό σύστημα) ο τύπος που μας δίνει το σταθερό τοκοχρεολύσιο είναι

$$R=K/\alpha_{n|i} = 40.000/\alpha_{4|7,5\%} = 40.000/3,3493 = 11.943 \text{ ευρώ ίδιο για όλα τα έτη}$$

Το χρεολύσιο του πρώτου έτους υπολογίζεται από τον τύπο

$$X_1=K \cdot P_{1|i} = 40.000 \cdot 0,2236 = \mathbf{8.943} \text{ ευρώ και ο τόκος του πρώτου έτους είναι } I_1 = 40.000 \cdot 0,075 = \mathbf{3.000} \text{ ή διαφορετικά } I_1 = R - X_1$$

Το χρεολύσιο του δεύτερου έτους υπολογίζεται από τον τύπο

$$X_2=X_1 \cdot (1+i) = 8.943 \cdot 1,075 = \mathbf{9.613,3} \text{ ευρώ και ο τόκος του δεύτερου έτους είναι } I_2 = R - X_2 = 11.943 - 9.613,3 = \mathbf{2.329,3} \text{ ή διαφορετικά } I_2 = (K - X_1) \cdot 0,075$$

Το χρεολύσιο του τρίτου έτους υπολογίζεται από τον τύπο

$$X_3=X_2 \cdot (1+i) = 9.613,3 \cdot 1,075 = \mathbf{10.334,3} \text{ ευρώ και ο τόκος του τρίτου έτους είναι } I_3 = R - X_3 = 11.943 - 10.334,3 = \mathbf{1.609,7} \text{ ή διαφορετικά } I_3 = (K - X_1 - X_2) \cdot 0,075$$

Το χρεολύσιο του τετάρτου έτους υπολογίζεται από τον τύπο

$$X_4=X_3 \cdot (1+i) = 10.334,3 \cdot 1,075 = \mathbf{11.109,5} \text{ ευρώ και ο τόκος του τετάρτου έτους είναι } I_4 = R - X_4 = 11.943 - 11.109,5 = \mathbf{833,5} \text{ ή διαφορετικά } I_4 = (K - X_1 - X_2 - X_3) \cdot 0,075$$

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά

1. Δάνειο 40.000 ευρώ πρέπει να εξοφληθεί σε 4 ετήσιες δόσεις με ετήσιο επιτόκιο 7,5%. Να βρεθεί το χρεολύσιο κάθε έτους στις ακόλουθες περιπτώσεις:

- α) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και σταθερό χρεολύσιο,
- β) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (γαλλικό σύστημα)
- γ) εξόφληση με σταθερό τοκοχρεολύσιο και μεταβλητό χρεολύσιο (σύστημα Κεντρικής Ευρώπης)
- δ) εξόφληση με μεταβλητό τοκοχρεολύσιο (σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου)

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=40.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με επιτόκιο 7,5% ετήσιο, η διάρκεια του 4 έτη.

γ) Με το σύστημα Κεντρικής Ευρώπης, οι τόκοι προκαταβάλλονται και χρειάζεται να βρούμε το **επιτόκιο  $t=i/(1-i)=0,075/(1-0,075)=0,08108$**

Κατόπιν ο τύπος που μας δίνει το σταθερό τοκοχρεολύσιο είναι

$$R=K*(1-i) / \alpha_{n|t} = 40.000 * (1-0,075) / \alpha_{4|8,1\%} = \\ =40.000 * (0,925) / 3,3042 = 11.198 \text{ ευρώ ίδιο για όλα τα έτη}$$

Το χρεολύσιο του πρώτου έτους υπολογίζεται από τον τύπο

$$X_1 = R*(1+t)^{-n+1} = 11.198 * (1+0,081)^{-4+1} = \mathbf{8.862,6} \text{ ευρώ και ο τόκος του πρώτου έτους είναι } I_1 = R - X_1 = 11.198 - 8.862,6 = 2.335,4$$

Το χρεολύσιο του δεύτερου έτους υπολογίζεται από τον τύπο

$$X_2 = X_1*(1+t) = 8.944 * 1,081 = \mathbf{9.581,2} \text{ ευρώ και ο τόκος του δεύτερου έτους είναι } I_2 = R - X_2 = 11.198 - 9.581,2 = 1.616,8$$

Το χρεολύσιο του τρίτου έτους υπολογίζεται από τον τύπο

$$X_3 = X_2*(1+t) = 9.581,2 * 1,081 = \mathbf{10.358} \text{ ευρώ και ο τόκος του τρίτου έτους είναι } I_3 = R - X_3 = 11.198 - 10.358 = 840$$

Το χρεολύσιο του τετάρτου έτους υπολογίζεται από τον τύπο

$$X_4 = X_3*(1+t) = 10.358 * 1,081 = \mathbf{11.198} \text{ ευρώ και ο τόκος του τετάρτου έτους είναι } I_4 = R - X_4 = 11.198 - 11.198 = 0$$

δ) Με το σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου, τα χρεολύσια  $X_1, X_2, X_3, X_4$  είναι ίσα μεταξύ τους και ίσα με  $K/4=40.000/4=10.000$  ανά έτος

Ο τόκος  $I_1=40.000*0,075=3.000$ ,  $I_2=(40.000-10.000)*0,075=2.250$ ,  $I_3=(40.000-10.000-10.000)*0,075=1.500$ ,  $I_4=(40.000-10.000-10.000-10.000)*0,075=750$  Ισχύει τοκοχρεολύσιο  $R_p = X_p + I_p$ ,

οπότε  $R_1=13.000$ ,  $R_2=12.250$ ,  $R_3=11.500$ ,  $R_4=10.750$

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά

2. Να γίνει πίνακας απόσβεσης δανείου της άσκησης 1, σε κάθε μία από τις 4 περιπτώσεις συστήματος δανεισμού.

α) σταθερό τοκοχρεολύσιο και σταθερό χρεολύσιο

Έτος	χρεολύσιο	τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο δανείου
1	8942,68	3000	11942,68	8942,68	31057,3
2	8942,68	3000	11942,68	18556,06	21443,9
3	8942,68	3000	11942,68	28890,45	11109,6
4	8942,68	3000	11942,68	39999,91	0,09101

β) γαλλικό σύστημα

Έτος	χρεολύσιο	τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο δανείου
1	8942,68	3000	11942,70	8942,68	31057,3
2	9613,381	2329,3	11942,70	18556,06	21443,9
3	10334,38	1608,3	11942,70	28890,45	11109,6
4	11109,46	833,24	11942,70	39999,91	0,09101

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά

2. Να γίνει πίνακας απόσβεσης δανείου της άσκησης 1, σε κάθε μία από τις 4 περιπτώσεις συστήματος δανεισμού.

γ) σύστημα Κεντρικής Ευρώπης

Έτος	χρεολύσιο	Τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο δανείου
1	8862,6	2335,3	11197,9	8862,589	31137,4
2	9581,2	1616,7	11197,9	18443,77	21556,2
3	10358,0	839,8	11197,9	28801,79	11198,2
4	11197,9	0,0	11197,9	39999,66	0,33575

δ) σύστημα ίσων μερών κεφαλαίου

Έτος	χρεολύσιο	Τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο δανείου
1	10000	3000	13000	10000	30000
2	10000	2250	12250	20000	20000
3	10000	1500	11500	30000	10000
4	10000	750	10750	40000	0

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά

3. Ποιο ποσό χρημάτων πρέπει να καταθέτει κάποιος κάθε εξάμηνο για 4 χρόνια, ώστε να μπορέσει να αποσβέσει δάνειο 20.000 ευρώ με επιτόκιο δανεισμού 6%, το οποίο εξοφλείται με σταθερό τοκοχρεολύσιο και σταθερό χρεολύσιο;

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=20.000$ , ο ανατοκισμός εξαμηνιαίος με επιτόκιο 6% ετήσιο επομένως 3% εξαμηνιαίος, η διάρκεια του 4 έτη, δηλαδή 8 εξάμηνα.

Ο τύπος που μας δίνει το χρεολύσιο είναι  $X=K * P_{n|i}$

Και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$X=20.000 * P_{8|3\%}=20.000*0,1125=2.250 \text{ ευρώ}$$

Το ποσό των τόκων κάθε εξαμήνου είναι  $20.000*0,03=600$  ευρώ

Συνολικά κάθε εξάμηνο πρέπει να καταθέτει  $2.250+600=2.850$  ευρώ

4. Η Εταιρεία Ε πήρε δάνειο 40.000 ευρώ το οποίο πρέπει να εξοφληθεί σε 10 έτη με το σύστημα Sinking Fund με επιτόκιο δανεισμού 6,5% και επιτόκιο καταθέσεως 3%. Η εταιρεία Ε εξετάζει και την περίπτωση να δανεισθεί το ίδιο ποσό με την προοδευτική μέθοδο και επιτόκιο δανεισμού 6,5%. Να υπολογισθεί η ετήσια δόση σε κάθε περίπτωση. Ποια περίπτωση συμφέρει στην εταιρεία;

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=40.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με επιτόκιο 6,5%, η διάρκεια του 10 έτη.

με το σύστημα Sinking Fund

Ο τύπος που μας δίνει τη δόση κατάθεσης είναι  $X=K * P_{n|t}$

Και αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$X=40.000 * P_{10|3\%}=40.000*0,0872=3.488 \text{ ευρώ}$$

Το ποσό των τόκων κάθε έτους είναι  $40.000*0,065=2.600$  ευρώ

Συνολικά κάθε έτος πρέπει να καταθέτει  $3.488+2.600=6.088$  ευρώ

με την προοδευτική μέθοδο

$$\begin{aligned} \text{Το ποσό του τοκοχρεολυσίου είναι } R &= K/a_{n|i} = 40.000/ a_{10|6,5\%} = \\ &= 40.000/7,1818= 5.569,63 \text{ ευρώ} \end{aligned}$$

Η δεύτερη περίπτωση συμφέρει περισσότερο στην εταιρεία αφού η ετήσια δόση είναι 5.569,3 αντί για 6.088 της πρώτης περίπτωσης

# Ασκήσεις με δάνεια εξοφλητέα τοκοχρεολυτικά

5. Δάνειο 350.000 ευρώ, εξοφλείται με 12 ίσες ετήσιες δόσεις 40.000 ευρώ. Να βρεθεί το επιτόκιο με το οποίο υπολογίσθηκαν οι δόσεις.

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=350.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με άγνωστο επιτόκιο κι η διάρκεια του 12 έτη.

Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι σταθερού τοκοχρεολυσίου αφού αναφέρονται ίσες ετήσιες δόσεις.

Ο τύπος της ετήσιας τοκοχρεολυτικής δόσης είναι  $R=K/\alpha_{n|i}$

Αντικαθιστώντας έχουμε την εξίσωση  $40.000=350.000/\alpha_{12|i\%}$   
 $\Leftrightarrow \alpha_{12|i\%}=350.000/40.000 \Leftrightarrow \alpha_{12|i\%}=8,75$ .

Επομένως θα πρέπει για το ζητούμενο άγνωστο επιτόκιο, ο συντελεστής αρχικής αξίας ράντας να είναι 8,75 όταν ο χρόνος είναι 12.

Ψάχνουμε στον πίνακα συντελεστή αρχικής αξίας ράντας, στη γραμμή που αντιστοιχεί στα 12 έτη, για ποια τιμή του  $i$ , ο συντελεστής αρχικής αξίας ράντας είναι κοντά στο 8,75

Εντοπίζουμε  $\alpha_{12|5,5\%}=8,6185$

Συμπεραίνουμε ότι το επιτόκιο του δανείου είναι λίγο χαμηλότερο από 5,5%.

6. Δάνειο 150.000 ευρώ, εξοφλείται με ίσες τοκοχρεολυτικές δόσεις σε 6 έτη. Να γίνει ο πίνακας απόσβεσης με το σύστημα σταθερού τόκου και χρεολυσίου, όταν ο δανειζόμενος πληρώνει κάθε χρόνο για τόκους 10.500 ευρώ.

Λύση

Το κεφάλαιο  $K$  του δανείου είναι  $K=150.000$ , ο ανατοκισμός ετήσιος με άγνωστο επιτόκιο  $i$  κι η διάρκεια του 6 έτη.

Το σύστημα απόσβεσης του δανείου είναι σταθερού τοκοχρεολυσίου και σταθερού χρεολυσίου.

Ο τύπος των ετήσιων τόκων είναι  $I=K \cdot i \Leftrightarrow 10.500=150.000 \cdot i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow i = 10.500/150.000 \Leftrightarrow i = 0,07 = 7\%$  είναι το επιτόκιο δανείου

Η ετήσια τοκοχρεολυτική δόση είναι  $R=K / a_{n|i\%} =$

$= 150.000/a_{6|7\%} = 150.000/4,7665 = 31.469,63$  ευρώ .

Επομένως το χρεολύσιο θα είναι  $31,469,63 - 10.500 = 20.969,63$

Το ποσό που εξοφλείται κάθε έτος είναι το ποσό που εξοφλήθηκε το προηγούμενο έτος, αυξημένο με τον τόκο του (επί 1,07) και σε αυτό προστίθεται το ποσό χρεολυσίου 20.969,7 του αντίστοιχου έτους.

Το υπόλοιπο δανείου υπολογίζεται αφαιρώντας από το κεφάλαιο 150.000 το ποσό που εξοφλήθηκε στο αντίστοιχο έτος.

Ο πίνακας απόσβεσης θα είναι ο παρακάτω:

Έτος	Χρεολύσιο	Τόκος	τοκοχρεολύσιο	εξοφλήθηκε	Υπόλοιπο δανείου
1	20.969,7	10.500	31.469,7	20.969,7	129.030
2	20.969,7	10.500	31.469,7	43.407,28	106.593
3	20.969,7	10.500	31.469,7	67.415,49	82.584,5
4	20.969,7	10.500	31.469,7	93.104,27	56.895,7
5	20.969,7	10.500	31.469,7	120.591,3	29.408,7
6	20.969,7	10.500	31.469,7	150.002,4	0